ELSEVIER Journal of Geometry and Physics 23 (1997) 308–318

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Perspectives sur la théorie des pseudogroupes de transformations analytiques de type infini

Niky Kamran *, Thierry Robart [1]

Department of Mathematics, McGill University, Montreal, Que., Canada H3A 2K6

Résumé

Cet article traite du problème de la structure locale et abstraite des pseudogroupes de Lie de type infini. L'aspect formel est abordé sous plusieurs formes canoniques. L'une d'entre elles est compatible avec le comportement pathologique connu de la fonction exponentielle. Cela définit un programme très précis pour l'élaboration d'une théorie abstraite et convergente des pseudogroupes de Lie analytiques de type infini.

Abstract

This paper deals with the local and abstract structure of Lie pseudogroups of infinite type. The formal aspect is considered in several cannonical ways, one of which is compatible with the known pathological behaviour of the exponential function. This defines a very precise program for the development of a convergent abstract theory of analytic Lie pseudogroups of infinite type.

Subj. Class.: Differential geometry
1991 MSC: Primary 22E65, Secondary 17B65
Keywords: Pseudogroupes of transformations

Dedié au Professeur André Lichnerowicz

1. Introduction

Dans son essai sur *L'avenir des mathématiques* [Wei 79, p. 366], André Weil abordait ainsi, en 1947, le chapitre des pseudogroupes de type infini: 'Sur la théorie, si importante sans doute, mais pour nous si obscure, des "groupes de Lie infinis", nous ne savons rien que ce qui se trouve dans les mémoires de Cartan, première exploration à travers une jungle presque impénétrable; mais celle-ci menace de se refermer sur les sentiers déjà tracés, si

* Corresponding author. E-mail: nkamran@scylla.math.mcgill.ca.
[1] E-mail: robart@zaphod.math.mcgill.ca.

PII S0393-0440(97)00052-1

l'on ne procède bientôt à un indispensable travail de défrichement.'. Depuis Sophus Lie [Lie 91,Lie 95] et Élie Cartan [Car 04,Car 05,Car 08,Car 09] la recherche se heurte invariablement aux difficultés techniques inhérentes à l'analyse dans les espaces fonctionnels (absence par exemple du théorème de la fonction inverse, d'un théorème d'existence pour le problème de Cauchy). Malgré d'importants progrès dans cette direction, l'élaboration d'une théorie pleinement satisfaisante des groupes et pseudogroupes de Lie de dimension infinie demeure un problème largement ouvert. Parmi de nombreux travaux, notons tout particulièrement ceux de Lie (ibid), Tresse [Tre 94], Cartan (ibid), Chern [Chn 54], Libermann [Lib 59], Kuranishi [Kur 59], Spencer [Spe 62], Guillemin, Singer, Sternberg [SiS 65,GuS 64], Arnold [Arn 66], van Est, Korthagen [Van 64,Van 84], Douady, Lazard [DoL 66], Leslie [Les 67,Les 82,Les 92,Les 93], Goldschmidt [Gol 72], Ebin, Marsden [Ebi 70], Omori, de la Harpe, Maeda, Yoshioka, Kobayashi [OmH 72,Omo 74,OMYK 81], Avez, Lichnerowicz, Diaz-Miranda [ALD 74,Lic 73,Lic 74,Lic 77], Hamilton [Ham 82], Milnor [Mil 83], Coste, Dazord, Weinstein [Wei 71,CDW 87,Daz 93,Daz 95], Banyaga, Donato [BaD 93], Souriau [Sou 80,Sou 85], Frölicher, Kriegl [FK 88], Grabowski [Gra 88,Gra 93].

Compte tenu des succès obtenus par la théorie des groupes de Lie de dimension finie, une telle élaboration se présente comme un problème à la fois naturel et important. C'est ce que souligne indirectement le bilan dressé par Weinstein sur la notion de groupoïde de Lie [Wei 96].

Cet article brosse dans un premier temps un portrait simplifié de la théorie locale des pseudogroupes de Lie de type infini telle qu'elle transparaît après les travaux fondamentaux d'Élie Cartan [Car 37], de Guillemin, Singer et Sternberg [GuS 64,SiS 65]. Leur point de vue essentiellement algébrique est ensuite examiné sous l'angle de la théorie moderne des groupes de Lie de dimension infinie au sens de Milnor [Mil 83]. Si la théorie formelle des pseudogroupes de Lie est assez bien comprise, le comportement pathologique connu de la fonction exponentielle [Frei 67,Pal 74,Eca 75] est un véritable obstacle à son extension au cadre convergent. Le traitement proposé vise à contourner cette limitation. Il s'agit d'une approche canonique adaptée à l'analyse, si fondamentale pour la théorie, des second et troisième problèmes de Lie [Rob 96]. Cela ouvre les portes pour une théorie abstraite et convergente des pseudogroupes de Lie analytiques. Certains résultats fondamentaux dans cette direction sont annoncés. Cette étude qui reprend et prolonge [RoK 97] fera l'objet d'un article plus détaillé [KaR 97].

2. Pseudogroupes de Lie

Si V est une variété analytique de dimension finie, un pseudogroupe de Lie de transformations de V est essentiellement une collection Γ d'homéomorphismes analytiques locaux stable par l'inversion et par la composition qui est partiellement définie, Γ constituant la solution générale d'un système $\mathcal{S}$ d'équations aux dérivées partielles analytiques. Ainsi l'ensemble des transformations locales conformes du plan complexe constitue un pseudogroupe de Lie associé aux équations de Cauchy–Riemann.

Lorsque $\mathcal{S}$ est un système de Mayer–Lie, c'est-à-dire complètement intégrable, les éléments de Γ dépendent localement d'un nombre fini de paramètres. On a un "groupe continu fini". C'est le point de départ de la théorie classique des groupes de Lie. On peut alors concevoir Γ comme étant une action sur V d'un voisinage de l'identité d'un groupe de Lie G de dimension finie. Par exemple, si $V =$ et $\mathcal{S}$ est l'équation différentielle d'ordre 3

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3\bar{x}}{\mathrm{d}x^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 = 0,$$

le pseudogroupe de Lie $\Gamma(\mathcal{S})$ correspondant consiste en les transformations homographiques et peut être regardé comme une action locale de $G = \mathbb{Z}_2 \times SL(2, \mathbb{R})$ sur $V = \mathbb{R}$.

Si $\mathcal{S}$ n'est pas complètement intégrable Γ est dit de type infini. La théorie des systèmes involutifs de Cartan montre alors que, dans le cadre analytique, Γ est localement paramétrisé par un nombre fini de fonctions. Ce point de vue est à l'origine de la théorie locale et formelle de Kuranishi [Kur 59,RoK 97]. Le système involutif élémentaire $\partial\bar{x}/\partial y = 0$; $\partial^2\bar{y}/\partial y^2 = 0$ admet, par exemple, pour solutions $\bar{x} = \phi(x)$; $\bar{y} = \psi(x)y + \rho(x)$ et définit un pseudogroupe de Lie de type infini sur $\mathbb{R}^2$.

3. Groupes de Lie de dimension infinie

Si la notion moderne de groupe de Lie de dimension infinie n'a pas été fixée, le point de vue exposé par Milnor dans ses *Remarks on infinite dimensional Lie groups* [Mil 83] demeure le plus naturel dès lors que l'on ne rejette pas l'axiomatique des variétés [Daz 93]. Un groupe de Lie de dimension infinie est, selon Milnor, un groupe muni d'une structure de variété indéfiniment différentiable modelée sur un espace vectoriel localement convexe Hausdorff complet et compatible avec les opérations de groupe [Mil 83]. Le calcul différentiel utilisé est celui de Gâteaux. Il est à noter que ce point de vue est essentiellement descriptif compte tenu de l'absence de théorèmes fondamentaux pour le calcul différentiel de type Gâteaux hors des espaces banachiques.

Si G est un groupe de Lie de dimension infinie, l'espace modèle de sa structure de variété sous-jacente s'identifie à son algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$. L'existence pour tout v de $\mathcal{L}(G)$ d'un sous-groupe à un paramètre $\gamma_v :\to G$ admettant v pour "vecteur vitesse initiale" $v = (\mathrm{d}\gamma_v/\mathrm{d}t)_{|t=0}$ n'est pas toujours garantie. Lorsque c'est le cas l'application $\mathrm{Exp} : \mathcal{L}(G) \to G$ qui à v associe $\gamma_v(1)$ désigne l'exponentielle de groupe.

L'ensemble $C^\infty([0, 1], \mathcal{L}(G))$, des chemins lisses de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$, est muni de la topologie de la convergence uniforme C^∞. Le groupe G est dit *régulier* si l'équation différentielle ordinaire

$$g^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) \text{ avec } g(0) = e \tag{1}$$

admet une solution lisse γ_v quel que soit le chemin lisse v de $\mathcal{L}(G)$, et si la correspondance $v \mapsto \gamma_v(1)$ de $C^\infty([0, 1], \mathcal{L}(G))$ à valeurs dans G est indéfiniment différentiable. On dit alors, que v est la *dérivée logarithmique à gauche* du chemin γ_v.

Par exemple, le groupe $\mathrm{Diff}^{\infty}(V)$ des difféomorphismes C^{∞} d'une variété compacte V est un groupe de Lie régulier modelé sur l'espace de Fréchet $\chi^{\infty}(V)$ des champs de vecteurs lisses sur V [Les 67]. Une question ouverte concerne l'existence de groupes de Lie non réguliers. Il est raisonnable de penser que le groupe $\mathrm{Diff}^{\infty}(V)$ des difféomorphismes lisses d'une variété *non compacte* admet une structure de groupe de Lie *non régulier* modelé sur l'espace de ses champs de vecteurs lisses.

3.1. Groupes et algèbres de première espèce

De nombreux groupes de Lie de dimension infinie admettent une carte canonique de première espèce; i.e. l'exponentielle est une carte au voisinage de l'élément neutre. Ils définissent une classe $\mathcal{EXP}$ de groupes de Lie de dimension infinie. Un groupe G de $\mathcal{EXP}$ est dit *de première espèce*.

Si $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie topologique ayant $\mathcal{Z}$ pour centre, le quotient $\mathcal{K} = L/Z$ est naturellement structuré en algèbre de Lie topologique. On peut identifier $\mathcal{K}$ à une sous-algèbre de Lie topologique de l'algèbre de Lie $\mathcal{E}nd(\mathcal{L})$ des endomorphismes continus de $\mathcal{L}$ par l'injection $\mathcal{K} \overset{ad}{\hookrightarrow} \mathcal{E}nd(\mathcal{L})$. Nous dirons que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie de première espèce si la fonction exponentielle est définie dans $\mathcal{K}$ et structure $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Exp}\,\mathcal{K})^n$ en un groupe de Lie de première espèce. La classe des algèbres de Lie de première espèce, notée $\mathcal{L}(EXP)$, est précisément la classe associée à $\mathcal{EXP}$. Lorsqu'un groupe de première espèce est analytique au sens de Gâteaux on dira avec J.Milnor [Mil 83] qu'il est de type Campbell–Baker–Hausdorff ou de type CBH. Cela définit la classe $\mathcal{CBH}$ des groupes de Lie de type CBH. A cette classe est naturellement associée la classe $\mathcal{L}(CBH)$ des algèbres de Lie de type CBH caractérisées par l'analyticité locale de la série formelle de Campbell–Baker–Hausdorff.

Les groupes de Lie banachiques, les nouvelles classes de groupes de Lie construites dans [NRW 94], Les groupes de Lie nilpotents, les groupes de jauge, et les groupes de Lie formels de type Campbell–Baker–Hausdorff construits à partir d'un ensemble fini d'éléments sont des exemples importants de groupes de Lie de type CBH.

3.2. Groupes et algèbres de Lie de seconde espèce

Soit G un groupe de Lie de dimension infinie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On dira que G est un groupe de Lie de seconde espèce s'il existe pour $\mathcal{G}$ une décomposition en somme directe $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{G}_i$ de telle sorte que l'application $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Exp}_i$, qui à $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{G}_1 \times \cdots \times \mathcal{G}_m$ associe le produit $\mathrm{Exp}(x_1) \cdots \mathrm{Exp}(x_m) \in G$, définisse une carte de variété au voisinage de l'élément neutre. Afin de préciser la "multiplicité" m de la décomposition, on dira que G appartient à la classe $\mathcal{EXP}^m$. Il est clair que $\mathcal{CBH} \subset \mathcal{EXP} \subset \mathcal{EXP}^m \subset \mathcal{EXP}^{m'}$ pour tout $m < m'$. On définit la classe associée d'algèbres de Lie de la même façon que $\mathcal{L}(EXP)$ [RoK 97]. Comme exemple important de groupe de Lie de seconde espèce, on notera les groupes de jauge généralisés obtenus comme extension d'un groupe de Lie basique (dimension finie) avec un groupe de jauge pure (symétrie interne).

4. Pseudogroupes de Lie et G-structures

Les premièrs travaux consacrés entre autres par S. Lie, F. Engel et Medolaghi à l'extension au cadre de la dimension infinie de la théorie des groupes de Lie étaient déjà fondés sur la considération des transformations infinitésimales. Ils rencontrèrent des difficultés techniques considérables qu'Élie Cartan jugea plus tard presque insurmontables [Car 37]. C'est en partant directement des équations de définition, qu'Élie Cartan établit au début de ce siècle les bases de la théorie moderne. A cet effet il introduit la notion de prolongement *holoédrique* [Car 37]. Cartan montre alors que tout pseudogroupe de Lie Γ admet un prolongement holoédrique Γ' du premier ordre (prolongement normal) opérant sur un espace de dimension r et caractérisé par la propriété de laisser invariantes certaines variables (cas intransitif; ce sont les invariants essentiels) et une collection de r formes de Pfaff. C'est le premier théorème fondamental de Cartan (Cartan I). Le second théorème fondamental (Cartan II) affirme que ces formes ω^i vérifient des équations de structure

$$\mathrm{d}\omega^i = \tfrac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + a^i_{js}\omega^j \wedge \bar{\omega}^s,$$

les formes $\bar{\omega}^s$ étant définies sur un prolongement de l'espace où opère Γ'. Les coefficients a^i_{js} forment un tableau involutif. Les coefficients C^i_{jk} et a^i_{js} sont fonctions des invariants essentiels. Un pseudogroupe transitif n'admet pas d'invariant essentiel. Ses coefficients de structure se réduisent à des constantes. Si le pseudogroupe est de type fini les a^i_{js} n'apparaîssent pas. On retrouve alors les équations de Maurer–Cartan. Le problème de la structure des pseudogroupes de Lie se ramène dans un premier temps à celui des pseudogroupes de Lie transitifs.

Le contenu géométrique du premier théorème fondamental de Cartan pour les pseudogroupes transitifs est dégagé dans [Chn 54,SiS 65]. Un pseudogroupe de Lie transitif n'est autre que le pseudogroupe des automorphismes d'une G-structure. Mais ce point de vue n'est pas totalement abstrait et prend toujours l'aspect d'une représentation. Il est intimement lié à la notion d'algèbre de Lie tronquée [GuS 64] et reflète la position partiellement duale adoptée par Élie Cartan. Usant du processus de prolongation à l'infini, Guillemin et Sternberg associent alors très naturellement une algèbre de Lie (formelle) $\mathcal{L}(\Gamma)$ à tout pseudogroupe de Lie transitif Γ [GuS 64]. Bien entendu, leur approche formelle est tout aussi valable dans un contexte analytique de sorte que l'on associe, à tout pseudogroupe transitif analytique Γ, une algèbre de Lie $\mathcal{L}^{\omega}(\Gamma)$ qui s'injecte dans l'algèbre de Lie formelle $\mathcal{L}(\Gamma)$ de Guillemin et Sternberg. A ce stade, la théorie des pseudogroupes analytique prend un contenu abstrait (et convergent) sous la forme d'une algèbre de Lie. Tout le problème consiste à intégrer cette algèbre de Lie en un sens analogue au troisième théorème fondamental de Lie. C'est le point de vue original de Sophus Lie.

5. Obstacles à l'extension

L'extension au cadre de la dimension infinie de la théorie classique des groupes de Lie s'est heurtée à deux difficultés fondamentales. La première, mise en évidence par van Est et

Korthagen [Van 64], concerne une *anomalie* dans le troisième théorème fondamental de Lie. Elle nous apprend que la notion de groupe de Lie doit être, dans certains cas, généralisée par la notion de schéma en groupes de Lie [Van 84]. La seconde difficulté demeure toujours un obstacle. Il s'agit du comportement localement *pathologique* de la fonction exponentielle [Gra 88]. Il est faux que, comme l'avait conjecturé Sophus Lie, l'application exponentielle définie dans l'algèbre de Lie et à valeur dans le groupe soit toujours un difféomorphisme local. Cette défaillance soulignée dès les années soixante [Frei 67,Pal 74] nous prive d'une procédure *canonique* permettant de structurer un groupe différentiel en (schéma de) groupe de Lie. C'est la pierre d'achoppement des recherches modernes. L'obstacle est très sérieux. Il est parfois contourné par l'abandon pur et simple de l'axiomatique des variété [Sou 80,Daz 93]. On peut néanmoins prévoir que la découverte d'une procédure *canonique* remplaçant l'utilisation de la "carte exponentielle" sera à l'origine de profondes découvertes.

6. Pseudogroupes formels

L'approche formelle de la structure des pseudogroupes de Lie inaugurée par Kuranishi [Kur 59] et reprise par Guillemin et Sternberg [GuS 64] au niveau algébrique semble bien peu adaptée aux problèmes convergents. Pourtant ce point de vue reste fondamental. L'algèbre de Lie formelle est l'outil essentiel du travail de classification de Cartan [SiS 65,Shn 70]. D'autre part nous allons voir que sa structure sert de véritable guide dans le problème d'intégration convergente qui nous concerne.

6.1. Algèbre de Lie

Désignons par $\chi^{\infty}(n) = \chi^{\infty}_{O,-1}(n)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels basés à l'origine O de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier naturel q, $\chi^{\infty}_{O,q}(n)$ sera la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs formels tangents à l'ordre q avec le champ nul. Cela précise la filtration décroissante naturelle associée à $\chi^{\infty}(n)$. On munit $\chi^{\infty}(n)$ de la topologie naturelle de Tychonov. Si Γ est un pseudogroupe de Lie transitif opérant sur ^{n}, son algèbre de Lie formelle $\mathcal{L}(\Gamma)$ est une sous-algèbre de Lie fermée de $\chi^{\infty}(n)$. En posant $\mathcal{L}_q(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma) \cap \chi^{\infty}_{O,q}(n)$ on a également $\mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L}_0(\Gamma) \simeq^n$ par transitivité. On associe très naturellement à $\mathcal{L}(\Gamma)$ une algèbre de Lie *plate*, que nous noterons $L(\Gamma)$. Par définition $L(\Gamma) = \bigoplus_{q=-1}^{\infty} \mathcal{L}_q(\Gamma)/\mathcal{L}_{q+1}(\Gamma)$ [GuS 64]. L'algèbre de Lie plate détermine le type de géométrie associé à Γ. La notion d'algèbre de Lie tronquée (équations de Cartan) permet de différencier les pseudogroupes ayant le même type de géométrie.

6.2. Intégration formelle

On démontre le résultat suivant [RoK 97].

Theorem 1 (Lie III formel). *La sous-algèbre de Lie $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ de l'algèbre de Lie formelle $\mathcal{L}(\Gamma)$ d'un pseudogroupe de Lie transitif de type infini s'intègre en un unique groupe de*

Lie régulier de seconde espèce connexe et simplement connexe, que nous notons $G_0(\Gamma)$. Ce groupe admet un sous-groupe de Lie de codimension finie de type CBH, noté $G_1(\Gamma)$, qui intègre $\mathcal{L}_1(\Gamma)$. Il en résulte que l'algèbre formelle $\mathcal{L}(\Gamma)$ s'intègre en un pseudogroupe de Lie formel de seconde espèce de la forme $A \otimes G$ où A représente la partie affine de Γ et $G \simeq G_1(\Gamma)$.

Si Γ est un pseudogroupe de Lie plat, il est clair que A est un sous-groupe de Lie de Γ.

6.3. Cadre analytique, quasi-analytique, de Gevrey

Notons $V = \mathbb{R}^n$ et fixons une norme sur V. Cela définit dans l'espace $V \otimes S^p(V^\star)$ des champs de vecteurs homogènes de degré p une norme $\| \, . \, \|_p$.

Appelons avec Jean Écalle [Eca 75] suite de type $\mathcal{R}$, ou de type régulier, toute suite $\pi = \{\pi_n\}$ $(n \geq 1)$, positive, non décroissante telle que $\limsup \pi_{n+1}/\pi_n < \infty$. Si π est une telle suite, $\mathrm{d}\pi$ désignera la suite $\mathrm{d}\pi = \{n\pi_n\}$. Nous dirons qu'un champs de vecteur formel $X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$ (où, pour tout k, $X_k \in V \otimes S^k(V^\star)$) appartient à la classe $\mathcal{C}(\pi)$ si ses coefficients satisfont

$$\limsup \|X_n\|_n^{1/n}/\pi_n < \infty.$$

Remarquons que cette notion ne dépend pas de la norme choisie. Si $\pi \equiv \{1\}$ la classe $\mathcal{C}(\pi)$ correspondante est la classe analytique. Si $\pi_n = \log n$ ou plus généralement $\pi_n = \prod_{r=1}^{N} \log_{(r)} n$ où $\log_{(r)} n$ représente $(\log(\log \cdots (\log n)) \cdots)$ r fois et où N est fixe, la classe correspondante est la classe quasi-analytique de Denjoy. Si $\pi_n = n^\theta$ $(\theta > 0)$, il s'agit de la classe de Gevrey d'indice θ. On note alors $\Theta = \{n^\theta\}$. On peut démontrer que pour toute suite régulière π le sous-espace $\chi^\infty(n, \pi)$ de $\chi^\infty(n)$ constitué des champs de vecteurs formels de classe $\mathcal{C}(\pi)$ est en fait une sous-algèbre de Lie. De même, si Γ est un pseudogroupe de Lie quelconque, le sous-espace $\mathcal{L}^\pi(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\Gamma)$ constitué des champs de vecteurs formels de classe $\mathcal{C}(\pi)$ est une sous-algèbre de Lie. Tous ces espaces admettent une topologie naturelle de nature purement bornologique que nous décrivons maintenant.

Pour tout réel positif ρ désignons par $\mathcal{L}^\pi_\rho(\Gamma)$ le sous-espace de $\mathcal{L}^\pi(\Gamma)$ constitué des X tels que

$$\limsup \frac{\|X_n\|_n}{\pi_n^n \rho^n} < +\infty.$$

Il est clair que $\mathcal{L}^\pi(\Gamma) = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{L}^\pi_\rho(\Gamma)$. Chaque $\mathcal{L}^\pi_\rho(\Gamma)$ est naturellement structuré en espace de Banach en prenant pour norme

$$\|X\|_\rho = \sup_n \frac{\|X_n\|_n}{\pi_n^n \rho^n}.$$

Un sous-ensemble de $\mathcal{L}^\pi(\Gamma)$ sera dit borné s'il est contenu dans un $\mathcal{L}^\pi_\rho(\Gamma)$ et est borné par rapport à sa norme. Cela définit canoniquement une bornologie complète sur $\mathcal{L}^\pi(\Gamma)$. Il lui correspond naturellement la topologie localement convexe de limite inductive stricte puisque

$$\mathcal{L}^{\pi}(\Gamma) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{\pi}_{n}(\Gamma).$$

Si $\rho < \rho'$ l'injection $\mathcal{L}^{\pi}_{\rho}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{L}^{\pi}_{\rho'}(\Gamma)$ est bornée (donc continue) et compacte. Munie de cette topologie bornologique localement convexe Hausdorff complète, $\mathcal{L}^{\pi}(\Gamma)$ est une algèbre de Lie topologique de Silva [Les 82].

Désignons maintenant par $G^{\pi}_{0}(\Gamma)$ (resp. $G^{\pi}_{1}(\Gamma)$) le sous-espace de $G_0(\Gamma)$ (resp. $G_1(\Gamma)$) (voir théorème 1) constitué des séries de classe $\mathcal{C}(\pi)$ pour toute suite régulière π. De même on introduit les sous-espaces $G^{\pi}_{q}(\Gamma)$ pour tout entier q. Ces espaces sont munis de la topologie bornologique naturellement induite. Les résultats d'Écalle démontrés dans le cas unidimensionnel [Eca 75] se généralisent pour donner lieu à:

Theorem 2 (Lie III π-formel). *On suppose que Γ est un pseudogroupe de Lie plat, i.e. $\mathcal{L}(\Gamma) \simeq L(\Gamma)$. Pour toute suite π de classe $\mathcal{R}$, l'espace $G^{\pi}_{0}(\Gamma)$ muni de la loi de composition est un groupe difféologique* [Sou 80] *régulier. Si g est élément de $G^{\pi}_{q}(\Gamma)$ (pour tout entier $q > 0$), son logarithme formel est élément de $\mathcal{L}^{d\pi}_{q}(\Gamma)$. Cependant, pour tout $\theta \geq 1$ l'algèbre de Lie $\mathcal{L}^{\Theta}_{1}(\Gamma)$ est de type CBH et par suite $\mathcal{L}^{\Theta}(\Gamma)$ s'intègre en un pseudogroupe de Lie formel de seconde espèce d'ordre 2 de la forme $A \otimes G$ où A est un sous-groupe de Lie (partie affine) et où G intègre $\mathcal{L}^{\Theta}_{1}(\Gamma)$.*

La preuve de ce théorème sera donnée dans [KaR 97].

Remarque 1. Rappelons que nous disposons du théorème de Poincaré–Siegel pour le logarithme d'un difféomorphisme analytique sans résonance [Ste 58].

Remarque 2. Si $\lim \pi_n/n = 0$ il est certain que l'exponentielle restreinte à $\mathcal{L}^{\pi}_{q}(\Gamma)$ à valeurs dans $G^{\pi}_{q}(\Gamma)$ n'est pas un difféomorphisme local. L'algèbre de Lie $\mathcal{L}^{\pi}(\Gamma)$ ne s'intègre pas dans ces conditions en un pseudogroupe de Lie (au sens de Milnor) qui soit de seconde espèce et d'ordre *fini*. C'est le cas du cadre analytique.

Il semble néanmoins que $G^{\pi}_{0}(\Gamma)$ admette toujours une carte canonique de seconde espèce d'ordre infini. Notons $\exp_q$ la restriction de la fonction exponentielle au sous-espace vectoriel $\mathcal{L}_{q-1}(\Gamma)/\mathcal{L}_{q}(\Gamma)$. Supposons que le groupe différentiel $G^{\pi}_{N+2}(\Gamma)$ soit un groupe de Lie modelé sur son algèbre de Lie $\mathcal{L}^{\pi}_{N+2}(\Gamma)$ via le difféomorphisme local ϕ_{N+1}. C'est par exemple le cas pour le pseudogroupe général à n variables. Alors il est clair que le pseudogroupe de Lie Γ^{π} est une variété différentiable de dimension infinie. Celle-ci est modelée sur $\mathcal{L}^{\pi}(\Gamma)$ via la carte

$$\phi_{N+1} \otimes \exp_N \otimes \cdots \otimes \exp_0$$

qui associe à $X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$ le difféomorphisme

$$\phi_{N+1}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} X_k\right) \circ \exp_N X_N \circ \cdots \circ \exp_0 X_0.$$

Notons cette carte $\phi_{N+1} \otimes \prod_{k\in\{1,\dots,N\}}^{\lambda} \exp_k$. En faisant tendre N vers l'infini on obtient un candidat potentiel pour une carte canonique de seconde espèce d'ordre infini. Nous noterons cette application formelle $\prod_\lambda \mathrm{Exp}$. On a

$$\prod_\lambda \mathrm{Exp} = \lim_N \exp_N \otimes \cdots \otimes \exp_0 .$$

Bien entendu $\prod_\lambda \mathrm{Exp}$ fournit une autre carte canonique pour la structure de variété du pseudogroupe formel (voir théorème 1). Le problème général est beaucoup plus subtil. Il concerne essentiellement la surjectivité locale de cette application. On peut démontrer:

Proposition 1. *Si Γ est un pseudogroupe de Lie plat analytique, l'application $\prod_\lambda$ Exp est définie de $\mathcal{L}^\omega(\Gamma)$ à valeurs dans Γ^ω. Elle est Silva C^∞* [Col 82] *et par suite Gâteaux C^∞. De plus elle est localement injective et sa dérivée logarithmique*

$$\prod_\lambda Exp^{-1}\,\mathrm{d}\prod_\lambda Exp$$

est localement un difféomorphisme.

Ces résultats nous amènent à conjecturer

Conjecture 1 (Lie III). L'algèbre de Lie $\mathcal{L}^\omega(\Gamma)$ de tout pseudogroupe de Lie analytique s'intègre en un unique pseudogroupe de Lie au sens de Milnor connexe et simplement connexe de transformations analytiques (qui s'identifie à Γ). Il admet une carte canonique de seconde espèce d'ordre infini et dénombrable.

Remarque 3. Si ce résultat est vrai il faut s'attendre à ce qu'il le soit pour $\mathcal{L}^\pi(\Gamma)$ quelle que soit la suite π de classe $\mathcal{R}$.

Conjecture 2. Toute groupe infini de transformations analytiques est un groupe de Lie au sens de Milnor de seconde espèce d'ordre infini.

Références

[ALD 74] A. Avez, A. Lichnerowicz and A. Diaz-Miranda, Sur l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une variéte symplectique , J. Diff. Geom. 9 (1974) 1–40.

[Arn 66] V. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Ann. Inst. Grenoble 16 (1) (1966) 319–361.

[BaD 93] A. Banyaga and P. Donato, Some remarks on the integration of the Poisson algebra, prépublication, C.P.T Luniny Marseille (1993).

[Car 04] E. Cartan, Sur la struc ture des groupes infinis de transformations, Ann. Éc. Normale 21 (1904) 153-206; *Œuvres Complètes d'E.Cartan, Partie* II, Vol. 2 (Gauthier-Villars, Paris, 1953) pp. 571–624.

[Car 05] E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. Éc. Normale 22 (1905) 219–308; *Œuvres Complètes d'E.Cartan, Partie* II, Vol. 2 (Gauthier-Villars, Paris, 1953) pp. 625–714.

[Car 08] E. Cartan, Les sous-groupes des groupes continus de transformations, Ann. Éc. Normale 25 (1908) 57–194; *Œuvres Complètes d'E.Cartan, Partie* II, Vol. 2 (Gauthier-Villars, Paris, 1953) pp. 719–856.

[Car 09] E. Cartan, Les groupes de transformations continus, infinis, simples, Ann. Éc. Normale 26 (1909) 93–161; *Euvres Complètes d'E.Cartan, Partie* II, Vol. 2 (Gauthier-Villars, Paris, 1953) pp. 857–925.

[Car 37] E. Cartan, La structure des groupes infinis, Séminaire de Math., exposés G et H, 1er et 15 mars 1937, pp. 1–50; *Euvres Complètes d'E.Cartan, Partie* II, Vol. 2 (Gauthier-Villars, Paris, 1953) pp. 1335–1384.

[Chn 54] S.S. Chern, Pseudo-groupes continus infinis, Colloque de géométrie différentielle, Strasbourg (Editions du CNRS, Paris, 1954).

[Col 82] J.F. Colombeau, *Differential Calculus and Holomorphy*, Mathematical Studies, Vol. 64 (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[CDW 87] A. Coste, P. Dazord and A. Weinstein, Groupoïdes symplectiques, Publications du Département de Mathématiques de l'Univ. de LYON 1, 2/A-1987.

[Daz 93] P. Dazord, Lie groups and algebras in infinite dimension: A new approach, XXXIII *Taniguchi Symp. on Symplectic Geometry and Its applications* (1993).

[Daz 95] P. Dazord, Sur l'intégration des algèbres de Lie locales et la préquantification, Prepub. Inst. Girard Desargues U.R.A. CNRS 746, 5/1995.

[DoL 66] A. Douady and M. Lazard, Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes, Invent Math. 1 (1966) 133–151.

[Ebi 70] D.G. Ebin and J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Ann. of Math. 92 (1) (1970).

[Eca 75] J. Ecalle, Théorie itérative: Introduction à la théorie des invariants holomorphes, J. Math. Pure Appl. 54 (1975) 183–258.

[Frei 67] C. Freifeld, One-parameter subgroups do not fill a neighborhood of the identity in an infinite-dimensional Lie (pseudo-) Group (Battelle Rencontres, 1967) Lectures in Mathematics and Physics (Benjamin, New York) pp. 538–543.

[FK 88] A. Frölicher and A. Kriegl, *Linear Spaces and Differentiation Theory*, Pure and Applied Mathematics (Wiley, Chichester, 1988).

[Gol 72] H. Goldschmidt Sur la structure des équations de Lie: I. Le troisième théorème fondamental, J. Diff. Geom. 6 (1972) 67–95.

[Gra 88] J. Grabowski, Free subgroups of diffeomorphism groups, Fund. Math. 131 (1988) 103–121.

[Gra 93] J. Grabowski, Derivative of the exponential mapping for infinite dimensional Lie groups, preprint (1993).

[GuS 64] V. Guillemin and S. Sternberg, An algebraic model of transitive differential geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1) (1964) 16–47.

[Ham 82] R. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982) 65–222.

[KaR 97] N. Kamran and T. Robart, Canonical abstract structure of analytic Lie pseudogroups (1997) preprint. Ce résultat a été annoncé dans N. Kamran and T. Robart, Abstract structure for Lie pseudogroups of infinite type, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 324 (1997) 1395–1399.

[Kur 59] M. Kuranishi, On the local theory of continuous infinite pseudo groups I & II, Nagoya Math. J. 15 (1959) 225–260; 19 (1961) 55–91.

[Les 67] J. Leslie, On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology 6 (1967) 264–271.

[Les 82] J. Leslie, On the group of real analytic diffeomorphisms of a compact real analytic manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (2) (1982).

[Les 92] J. Leslie, Some integrable subalgebras of the Lie algebras of infinite-dimensional Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 423–443.

[Les 93] J. Leslie, On the integrability of some infinite dimensional Lie Algebras, preprint, Howard University, Washington, DC (1993).

[Lib 59] P. Libermann, Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie, Bull. Soc. Math. France 87 (1959) 409–425.

[Lic 73] A. Lichnerowicz, Algèbre de Lie des automorphismes infinitesimaux d'une structure de contact, J. Math. Pure Appl. 52 (1973) 473–508.

[Lic 74] A. Lichnerowicz, Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24 (3) (1974) 219–266.

[Lic 77] A. Lichnerowicz, Les variétes de Poisson et leurs algèbres de Lie associees, J. Diff. Geom. 12 (1977) 253–300.

[Lie 91] S. Lie, Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, Leipzig. Ber. 3 (1891) 316–393; also *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 6 (Teubner, Leipzig, 1927) pp. 300–364.

[Lie 95] S. Lie, Untersuchungen über unendliche kontinuierliche Gruppen, Leipzig. Abh. 21 (1895) 43–150; also *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 6 (Teubner, Leipzig, 1927) pp. 396–493.

[Mil 83] J. Milnor, Remarks on infinite dimensional Lie groups, *Proc. Summer School on Quantum Gravity*, les Houches, Session XL (North-Holland, Amseterdam, 1983).

[NRW 94] L. Natarajan, E. Rodriguez-Carrington and J.A. Wolf, Proc. Symp. Pure Math. 56 (2) (1994) 377.

[Omo 74] H. Omori; *Infinite Dimensional Lie Transformation Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 427 (Springer, Berlin, 1974).

[OmH 72] H. Omori and P. de la Harpe, About interaction between Banach Lie groups and finite-dimensional manifolds, J. Math. Kyoto University (1972) 12–13.

[OMYK 81] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka and O. Kobayashi, On regular Fréchet–Lie groups, Tokyo J. Math. 5 (2) (1981) 365–397.

[Pal 74] J. Palis, Vector fields generate few diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (3) (1974) 503–505.

[Rob 96] T. Robart, Groupes de Lie de dimension infinie. Second et troisième théorèmes de Lie. I – Groupes de première espèce, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 322 (1996) 1071–1074.

[RoK 97] T. Robart and N. Kamran, Sur la théorie locale des pseudogroupes de transformations continus infinis, Math. Ann. (à paraître) 1997.

[Shn 70] S. Shnider, The classification of real primitive infinite Lie algebras, J. Diff. Geom. 4 (1) (1970) 81–89.

[SiS 65] I.M. Singer and S. Sternberg, The infinite groups of Lie and Cartan. I. The transitive groups, J. d'Anal. Math. 15 (1965) 1–114.

[Sou 80] J-M. Souriau, *Groupes Différentiels*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 836 (Springer, Berlin, 1980) pp. 91–128.

[Sou 85] J-M. Souriau, Un algorithme générateur de structures quantiques, Soc. Math. France, Astérisque, hors série (1985) 341–399.

[Spe 62] D.C. Spencer, Deformation of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups, Ann. Math. (2) 76 (1962) 306–445.

[Ste 58] S. Sternberg, On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space, II, Amer. J. Math. 80 (1958) 623–631.

[Tre 94] A. Tresse, Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, Acta Math. 18 (1894) 1–88.

[Van 84] W.T. van Est, Rapport sur les S-Atlas, Astérique 116 (1984) 235–292.

[Van 64] W.T. van Est and T.J. Korthagen, *Nonenlargeable Lie Algebras*, Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch., Ser A-67 = Indag. Math. 26 (1964) 15–31.

[Wei 79] A. Weil, *Œuvres Scientifiques*, I (1926–1951) (Springer-Verlag, 1979).

[Wei 71] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds; Adv. in Math. 6 (1971) 329–346.

[Wei 96] A. Weinstein, Groupoids: Unifying internal and external symmetry, Notices of the Amer. Math. Soc. 43 (7) (1996) 744–752.